

コラム：複利計算と72の法則

Twitter ID：@yamak0523

2022年7月2日

金融機関にお金を複利方式で積み立てる際に、積立合計金額がどのように推移していくかについて考えよう。

今、初期の口座の預金額を a 円、年利 $100r\%$ 、 n 年後の積立合計金額を a_n 円とする。このとき、1 年後に受け取る利息は ar 円より、 $a_1 = a(1+r)$ 円となる。また、2 年後に受け取る利息は $ar(1+r) = a(r+r^2)$ 円より、 $a_2 = a(1+2r+r^2) = a(1+r)^2$ 円となる。

同様にして、 n 年後に受け取る利息は $ar(1+r)^{n-1}$ 円より、 $a_n = a(1+r)^{n-1} + ar(1+r)^{n-1} = a(1+r)^n$ 円となる。

ここで、次のようなモデルについて考えよう。

a 円を年利 100% 、1 年間の n 等分したタイミングで n 回積立を行う。(この際、年利も n 等分される.)

このとき、1 年後の積立合計金額は $a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 円となる。ここで、仮に $n \rightarrow \infty$ とすると、積立合計金額の極限は ae 円となる。ここで、Napier 数の e が出てくるのである。

複利計算に関連して、**72 の法則**という経済学上のある法則がある。それについて考えよう。72 の法則とは以下の主張である。

年利 $r\%$ で複利方式で積立を行うとき、積立合計金額が元本の 2 倍となる年数を n とすると $nr \doteq 72$ が成り立つ。

この事実を簡単に確認していこう。まず、仮定から $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 2$ が成り立つとすると、両辺、自然対数を取り、 $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開を行うことにより

$$\log 2 = n \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = n \left\{ \frac{r}{100} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{100^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{100^3} - \dots \right\} \doteq \frac{nr}{100}$$

より、 $nr = 100 \log 2 \doteq 69.3$ となるが、69.3 よりも扱いやすく、多くの約数を持つ 72 を代わりに用いて、 $nr \doteq 72$ とみなす。

実際に、シミュレーションをしてみよう。元金を100万円とし、年利6%とする。このとき、72の法則では元金が2倍の200万円になるのには12年かかることになるが、実際にはどうなのか積立合計金額の推移を表にしてみた。

年	積立合計金額 [円]
0	1,000,000
1	1,060,000
2	1,123,600
3	1,191,016
4	1,262,476
5	1,338,225
6	1,418,519
7	1,503,630
8	1,593,848
9	1,689,478
10	1,790,847
11	1,898,298
12	2,012,196
13	2,132,928

表によると確かに72の法則が成り立つことがわかる。当然ではあるが、72の法則はあくまで厳密な関係式ではないが、ひとつの参考にはなる法則ではあることには間違いがないので、覚えておいて損はないのではないだろうか。